ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

Math Planet

Συγγραφείς άρθρων:
Στυλιανος Σαχπαζης
Αθανασιος Μπεσλικας

Σύνταξη:
Νικολαος Κουγιουλης

Τεύχος 2 - Μάρτιος 2015

mathplanet.org

Περιεχομενα

1.	ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
2.	ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ STOLZ	3
3.	ΑΠΕΙΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ	12
4.	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	19

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το MATHPLANET επιστρέφει με το δεύτερο τεύχος του, γεμάτο ξανά σελίδες που στοχεύουν στην ανάδειξη της μαθηματικής ομορφιάς και την προώθηση της αγάπης για τα Μαθηματικά.

Στα άρθρα που ακολουθούν θα συναντήσετε μια πληθώρα αποδείξεων και προβλημάτων που με μεράκι βρήκαμε και λύσαμε. Προτού όμως προχωρήσετε στην ανάγνωσή τους να τονίσουμε τα ακόλουθα:

(1) Δεν κυνηγάμε κανένα συμφέρον καθώς η προσπάθεια μας είναι καθαρά και μόνο με κατεύθυνση αυτό που αγαπάμε, τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.
(2) Θέλουμε τη συμμετοχή σας. Μπορείτε να γίνετε μέλη του περιοδικού μας και να συνεισφέρετε με δικά σας προβλήματα, προτάσεις, λύσεις, η δημοσίευση των οποίων υπεισέρχεται στην κρίση των Υπευθύνων Σύνταξης.

Όπως γράψαμε και στον πρόλογο της προηγούμενης κυκλοφορίας κάθε τεύχος αποφασίστηκε να έχει διαφορετική θεματολογία. Το παρόν τεύχος είναι αφιερωμένο στην Ανάλυση, τον κλάδο των Μαθηματικών που γεννήθηκε τον 18ο αιώνα και από τότε μέχρι σήμερα δε παύει να ενθουσιάζει τους οπαδούς των θεωρητικών Μαθηματικών. Κάθε άλλο παρά αδικαιολόγητος θα μπορούσε να είναι αυτός ο ενθουσιασμός τους, αφού η Ανάλυση ανέκαθεν χαρακτηριζόταν από τις «ουρανοκατέβατες» ιδέες που τη θεμελίωσαν και ανέπτυξαν. Στο παρόν τεύχος θα μελετήσουμε ένα πολύ όμορφο θεώρημα για ακολουθίες , το οποίο στη βιβλιογραφία μας αναφέρεται ως «Λήμμα του Stolz» και θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε διάφορα όρια. Επίσης θα διερευνήσουμε την αναπαράσταση ως άπειρα γινόμενα διάφορων συναρτήσεων και σημαντικών αριθμητικών τιμών , με τη χρήση της γνωστής ταυτότητας του Euler για τους μιγαδικούς αριθμούς. Επίσης θα μελετήσουμε μερικές έννοιες της συνάρτησης Ζήτα του Riemann.

Να τονίσουμε ακόμη ότι οι συγγραφείς των άρθρων είναι μέλη του Math Planet. Μόνο τα μέλη μπορούν να δημοσιεύουν το δικό τους άρθρο. Φυσικά κάθε άρθρο ελέγχεται από τους υπεύθυνους σύνταξης οι οποίοι στη συνέχεια ,εάν κριθεί απαραίτητο τροποποιούν Ή και απορρίπτουν το άρθρο. Τόσο για την τροποποίηση ή και την απόρριψη ενός άρθρου έχει προηγηθεί η ενημέρωση του από τους Υπεύθυνους Σύνταξης. Ένα μέλος συνδράμει στην εκτύπωση του τεύχους στο οποίο υπάρχει άρθρο του. Εάν επιθυμείτε να γίνετε μέλος του περιοδικού μας αρκεί να μας στείλετε e-mail στην παρακάτω διεύθυνση:

mathplanetAUTH@yahoo.gr

2. ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ STOLZ

ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ STOLZ

ΣΤΕΛΙΟΣ ΣΑΧΠΑΖΗΣ

Περιληψη. Συχνά στον τομέα της Ανάλυσης τίθενται ζητήματα σχετικά με την σύγκλιση μιας ακολουθίας ή μίας σειράς, αλλά και την εύρεση του αριθμού στον οποίο συγκλίνουν. Η διαπίστωση της σύγκλισης είναι σχετικά απλή, όμως η εύρεση του ορίου ενδέχεται να είναι μια διαδικασία αρκετά ¨επίπονη¨. Για παράδειγμα με χρήση του κριτηρίου του Leibniz εύκολα συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

συγκλίνει. Ωστόσο ο υπολογισμός της δεν είναι απλή ιστορία και αυτό επιβεβαιώνεται από το αποτέλεσμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Μπορεί να υπολογιστεί από τη σειρά Fourier κατάλληλα επιλεγμένης συνάρτησης ή με ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αλλά όχι με κάποια στοιχειώδη τεχνική. Άλλο παράδειγμα, η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

για την οποία αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{e}$$

αλλά ο πιο κλασσικός τρόπος υπολογισμού προϋποθέτει τη γνώση της ανισότητας

$$e^{x-\frac{x^2}{2}} \leq 1+x \leq e^x,\ x \geq 0.$$

Διόλου απλό.
Εξαιτίας λοιπόν αυτής της σύγχησης σκοπός του άρθρου είναι να γράψουμε για το λήμμα του Stolz και να δούμε πόσο πολύ μας βοηθάει να αντιμετωπίζουμε με ευκολία ορισμένες ¨σκληροτράχυλες' περιπτώσεις ορίων. Επίσης συχνά παραλείπεται η παράδοσή του στα πρώτα εξάμηνα των μαθηματικών σχολών, άρα μας δίνεται μια καλή ευκαιρία να το ¨γνωρίσουμε¨.

1. ΤΟ ΛΗΜΜΑ

Είναι η εκδοχή του κανόνα L'Hospital στην περίπτωση των ακολουθιών.

Λήμμα 1.1. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών γνησίως αύξουσα με:*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}\cup\{,-\infty,+\infty\}$$

τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του Λήμματος δεν θα παρατεθεί, καθώς μπορείτε να την βρείτε στο [3] της βιβλιογραφίας. □

Πως όμως μας χρησιμεύει το λήμμα αυτό και σε ποιές περιπτώσεις ; Μας χρησιμεύει όταν αναζητούμε το όριο μιας ακολουθίας που ο n-οστός όρος της ισούται με ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής ή ο παρονομαστής(ή και οι δύο) είναι αθροίσματα όρων ακολουθιών. Το πως μας χρησιμεύει θα το καταλάβουμε από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.1. (Θεώρημα Stolz-Cesaro)
Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n \to a$.
Αποδείξτε ότι:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} a$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ και την $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $b_n = n$. Είναι εύκολο να δούμε πως $b_n \nearrow$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Επίσης:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+1}-S_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)-n} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = a$$

Άρα από το Λήμμα του Stolz έχουμε $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = a$, το οποίο ήταν και το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Στο [1] της βιβλιογραφίας υπάρχει μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος αυτού στην οποία δεν χρησιμοποιείται το λήμμα. Όπως θα παρατηρήσετε και μόνοι σας είναι πιο σύνθετη(με εψιλοντικούς

ορισμούς ορίων).
Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο παράδειγμα θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε μια βασική ανισότητα που θα μας χρειαστεί:

$$lnx \leq x-1, x \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 1.2. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln1^k + ln2^k + ... + lnn^k}{1^k + 2^k + ... + n^k},\ k > 1.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \sum_{i=1}^{n} lni^k$ και $b_n = \sum_{i=1}^{n+1} i^k$. Προφανώς $b_n \nearrow$ και $lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Επίσης:

$$0 \leq \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{ln\left(n+1\right)^k}{\left(n+1\right)^k} = \frac{kln\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^k} \leq \frac{kn}{\left(n+1\right)^k} < \frac{k}{\left(n+1\right)^{k-1}}\ (1)$$

Εφόσον $k > 1$ έχουμε $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} \frac{k}{(n+1)^{k-1}} = 0$. Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο του εγκλεισμού και την (1) έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 0$. Τώρα με χρήση του λήμματος προκύπτει πως $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln1^k + ln2^k + ... + lnn^k}{1^k + 2^k + ... + n^k} = 0$$

□

Παράδειγμα 1.3. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{0^1 + 1^2 + 2^3 + ... + \left(n-1\right)^n}{2^1 + 3^2 + 4^3 + ... + \left(n+1\right)^n}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} i^{i+1}$ και $b_n = \sum_{i=2}^{n+1} i^{i-1}$. Είναι προφανές ότι $b_n \nearrow$ και $lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Επιπλέον έχουμε πως:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{\left(n+2\right)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} = e^{-2}
\end{aligned}$$

□

Μέχρι αυτό το σημείο είδαμε μόνο πόσο γρήγορα το λήμμα του Stolz ¨αποτελειώνει' μια συγκεκριμένη κατηγορία ορίων. Ωστόσο δεν ξεκαθαρίσαμε ότι σπάνια υπάρχει διαφορετική μέθοδος χειρισμού τους και πως όταν υπάρχει είναι πολύ δύσκολο να την σκαρφιστεί κάποιος. Ας δούμε λοιπόν τι θα αναγκαζόμασταν να κάνουμε στα δύο τελευταία παραδείγματα αν είχαμε άγνοια του λήμματος.

Πρώτα θα δώσουμε δυο ανισότητες που θα μας χρειαστούν:

Ανισότητα 1.1. *(Ανισότητα του Jensen) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, τότε:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right),\ x_1 ... x_n \in A,\ n \in \mathbb{N}$$

Ανισότητα 1.2. *(Ανισότητα του Chebyshev) Αν ισχύει:*

(1) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ *και* $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ *ή*
(2) $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ *και* $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ *τότε*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Παράδειγμα 1.4. (Άλλος τρόπος παραδείγματος 0.1)

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^k,\ k > 1$ είναι απειροδιαφορίρισμη και ισχύει $f''(x) = k\,(k-1)\,x^{k-2} > 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η f κυρτή. Επομένως σύμφωνα με την Ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \geq n \cdot f\left(\frac{1+2+..+n}{n}\right) \Rightarrow 1^k + 2^k + ... + n^k \geq n \cdot \left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}\right)^K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^k + 2^k + ... + n^k \geq \frac{n \cdot (n+1)^k}{2^k}\ (1)$$

Επίσης και η συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -lnx$ είναι απειροδιαφορίσιμη και $g''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Δηλαδή και αυτή είναι κυρτή και με χρήση της ανισότητας του Jensen παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} g(i) \geq n \cdot g\left(\frac{1+2+..+n}{n}\right) \Rightarrow$$

$$-\left(ln1+ln2+..+lnn\right)\geq -n\cdot ln\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}\right)\Rightarrow$$

$$k\left(ln1+ln2+...+lnn\right)\leq kn\cdot ln\left(\frac{n+1}{2}\right)\Rightarrow ln1^k+...+lnn^k<k\cdot n\frac{n+1}{2}\ (2)$$

αφού όπως είδαμε πιο πάνω $lnx\leq x-1\leq x$. Συνδυάζοντας τις (1) και (2) έπεται πως:

$$0\leq\frac{ln1^k+ln2^k+...+lnn^k}{1^k+2^k+...+n^k}\leq\frac{k\cdot 2^{k-1}}{(n+1)^{k-1}}\ (3)$$

Αφού όμως $k>1$ $\lim_{n\to+\infty}0=\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot 2^{k-1}}{(n+1)^{k-1}}=0$. Συνεπώς η (3) μαζί με το κριτήριο παρεμβολής μας δίνουν

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ln1^k+ln2^k+...+lnn^k}{1^k+2^k+...+n^k}=0$$

□

Πρωτού ξεκινήσουμε με την δεύτερη λύση του 3ου παραδείγματος ας θυμηθούμε πως η ακολουθία

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

είναι αύξουσα και συγκλίνει στον e. Άρα ο e είναι το supremum της ακολουθίας και κατά συνέπεια $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$.
Επίσης η ακολουθία

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

είναι φθίνουσα και συγκλίνει στον e, άρα όμοια είναι το infinum της και ισχύει $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geq e$.
Τώρα μπορούμε να ξεκινήσουμε τη λύση.

Απόδειξη. Έχουμε $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\Rightarrow\frac{1}{(n+1)^n}\geq e^{-1}\frac{1}{n^n}$ και $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\leq e\Rightarrow(n-1)^n\geq e^{-1}n^{n-1}\left(n-1\right)$.
Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες κατά μέλη βλέπουμε ότι $\frac{(n-1)^n}{(n+1)^n}\geq e^{-2}\frac{n-1}{n}$

$$\frac{0^1+1^2+2^3+...+(n-1)^n}{2^1+3^2+4^3+...+(n+1)^n}\geq e^{-2}\frac{\frac{1}{2}\cdot 3^2+...+\frac{n-1}{n}\left(n+1\right)^n}{2^1+3^2+..+(n+1)^n}\ (1)$$

Παρατηρούμε και ότι $\frac{n-1}{n} \geq \frac{n-2}{n-1} \geq ... \geq \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2}$ και $(n+1)^n \geq n^{n-1} \geq ... \geq 3^2$.
Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Chebyshev λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 + ... + \frac{n-1}{n} (n+1)^n\right) \geq \frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n} + ... + \frac{1}{2}\right) \cdot \\ \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \left((n+1)^n + ... + 3^2\right) (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\frac{0^1 + 1^2 + ... + (n-1)^n}{2^1 + 3^2 + ... + (n+1)^n} \geq e^{-2} \cdot \frac{\frac{n-1}{n} + ... + \frac{1}{2}}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{2}{2^1 + 3^2 + ... + (n-1)^n}\right) = \varphi_n \; (3)$$

Η ακολουθία $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 1 και άρα από το Θεώρημα Stolz-Cesaro (βλέπε παράδειγμα 0.1) συμπεραίνουμε πως:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1}}{n-1} \overset{n\to+\infty}{\to} 1 \Rightarrow \frac{\frac{n-1}{n} + ... + \frac{1}{2}}{n-1} \overset{n\to+\infty}{\to} 1$$

Επιπλέον είναι προφανές ότι $\left(1 - \frac{2}{2^1+3^2+...+(n+1)^n}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 1$.
Δηλαδή $\varphi_n \overset{n\to+\infty}{\to} e^{-2}$ (4) Από τη 2η ανισότητα που τονίσαμε πριν αρχίσουμε να δίνουμε την λύση, παίρνουμε:
$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq e \Rightarrow (n-1)^n \leq e^{-1} n^n$ και $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^n} \leq e^{-1} \cdot \frac{n+1}{n^{n+1}}$
Τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και προκύπτει ότι $\frac{(n-1)^n}{(n+1)^n} \leq e^{-2} \frac{n+1}{n}$ Άρα:

$$\frac{0^1 + 1^2 + ... + (n-1)^n}{2^1 + 3^2 + ... + (n+1)^n} \leq e^{-2} \frac{2^1 \cdot \frac{2}{1} + ... + (n+1)^n \cdot \frac{n+1}{n}}{2^1 + 3^2 + ... + (n+1)^n} \; (5)$$

Σε αυτό το σημείο μπορεί να διαπιστώσει κανείς τις ακόλουθες διατάξεις: $\frac{2}{1} \geq \frac{3}{2} \geq ... \geq \frac{n+1}{n}$, $-2^1 \geq -3^2 \geq ... \geq -(n+1)^n$. Η ανισότητα του Chebyshev μας δίνει τώρα την ανισότητα:

$$\Rightarrow 2^1 \cdot \frac{2}{1} + ... + (n+1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n-1} \cdot \left(2^1 + 3^2 + ... + (n+1)^n\right) \left(\frac{2}{1} + ... + \frac{n+1}{n}\right) (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) λαμβάνουμε:

$$\frac{0^1 + 1^2 + ... + (n-1)^n}{2^1 + 3^2 + ... + (n+1)^n} \leq e^{-2} \frac{\frac{2}{1} + ... + \frac{n+1}{n}}{n-1} = z_n \; (7)$$

Καθώς $\frac{n+1}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} 1$ λόγο του Θεωρήματος των Stolz-Cesaro βγαίνει ότι και $\frac{\frac{2}{1}+...+\frac{n+1}{n}}{n-1} \overset{n\to+\infty}{\to} 1$.
Δηλαδή και $z_n \overset{n\to+\infty}{\to} e^{-2}$ (8). Επομένως από τις σχέσεις (3),(4),(7) και (8) αλλά και το κριτήριο του εγκλεισμού έπεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{0^1+1^2+...+(n-1)^n}{2^1+3^2+...+(n+1)^n} = e^{-2}$$

. □

Σχόλιο: Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως το Λήμμα του Αυστριακού μαθηματικού είναι μεγάλης αξίας μιας και απλουστεύει σε μεγάλο βαθμό την επίλυση κάποιων ασκήσεων.

Αναφορες

1. Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα.
2. Ιστότοπος *mathematica.gr.*
3. W.J.Kaczor, M.T.Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*, Student Mathematical Library AMS (American Mathematical Society).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στη στήλη αυτή παραθέτουμε κάποιες ασκήσεις Ανάλυσης, οι λύσεις των οποίων θα δημοσιευθούν στο τέλος του επόμενου τεύχους. Μπορείτε να στείλετε τις δικές σας λύσεις στο e-mail ή να τις αναρτήσετε στην σελίδα μας mathplanet.org . Οι εντυπωσιακότερες λύσεις καθώς και τα ονόματα των λυτών θα δημοσιευθούν στο τέλος του επόμενου τεύχους.

Άσκηση 1.1. *Έστω η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *δύο φορές παραγωγίσιμη με* $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$ *και* $|f(x)|\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι* $\exists x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)+f''(x_0)=0$.

Άσκηση 1.2. *Αποδείξτε πως*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+k)}=\frac{1}{k\cdot k!},\ k\in\mathbb{N}$$

Άσκηση 1.3. *Βρείτε τη συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με δυναμοσειρά·*

$$f(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+...=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{3k}}{(3k!)}$$

Άσκηση 1.4. *Έστω η ακολουθία* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $\lim_{n\to+\infty}((a_1+1)...(a_n+1))=g,\ 0<g<+\infty$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{(a_1+1)...()a_n+1)}=1-\frac{1}{g}$$

Άσκηση 1.5. *Υπολογίστε τις παρακάτω σειρές:*

(1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2\cdot 4..(2n)}$$

(3)
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

Τμημα Μαθηματικων, Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης 541 24 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

3. ΑΠΕΙΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

ΑΠΕΙΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΠΕΣΛΙΚΑΣ

Περιληψη. Σε αυτό το άρθρο θα μελετήσουμε μερικά άπειρα γινόμενα με διαφορετικό τρόπο από τους συνηθισμένους. Δεν θα αναφερθούμε στο κλασσικό Θεώρημα του Weierstrass , που χρησιμοποιούμε στη Μιγαδική Ανάλυση αλλά θα τα δημιουργήσουμε με τη χρήση μιας ταυτότητας που θα δείξουμε με δικό μας τρόπο, βασιζόμενοι σε θεμελιώδεις έννοιες της Μιγαδικής Ανάλυσης. Στα [1] και [2] της βιβλιογραφίας θα βρείτε αποδείξεις που παρατείθενται στο τέλος του άρθρου αναπόδεικτα, και στο [3] τα βασικά στοιχεία που δίνουμε για τη συνάρτηση Ζήτα, που θα χρειαστούν στην επίλυση των προβλημάτων.

Ταυτότητα 0.1. *Ισχύει ότι* $z = |z|\, e^{iArg(z)}$, *όπου* $Arg(z) = arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$, *όπου* $Arg(z)$ *το όρισμα του μιγαδικού.*

Απόδειξη. Από την ταυτότητα του Euler έχουμε ότι :

$$e^{iArg(z)} = cos\left(Arg(z)\right) + isin\left(Arg(z)\right) \Rightarrow$$

$$e^{iArg(z)} = cos\left(arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) + isin\left(arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$e^{iArg(z)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} + i\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$e^{iArg(z)} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z}{|z|}$$

□

Πρόταση 0.1. *Έστω* a_n *μια ακολουθία και έστω ότι η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, με* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ *και* $a_i \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, *τότε ισχύει ότι:*

$$e^{i\lambda} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+itan(a_n)}{|sec(a_n)|}\right)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_n = 1+itan(a_n)$. Από την προηγούμενη ταυτότητα έχουμε ότι $z = |z|\, e^{iArg(z)}$, κάτι που ισχύει για όλους τους όρους της ακολουθίας που ορίσαμε πιο πάνω. Εύκολα μπορούμε να ισχυριστούμε πως:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{|z_n|} = \prod_{n=1}^{\infty} e^{iArg(z)} \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{|z_n|} = exp\left\{ i\sum_{i=1}^{\infty} Arg\left(z_n\right) \right\} \Rightarrow$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{|z_n|} = exp\left\{ i\sum_{i=1}^{\infty} arctan(tan(a_n)) \right\}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+itan(a_n)}{\sqrt{1+tan^2(a_n)}} = exp\left\{ i\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\} e^{i\lambda} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+itan(a_n)}{|sec(a_n)|} \right)$$

□

Την παραπάνω πρόταση μπορούμε εύκολα να την επεκτείνουμε και για δυναμοσειρές που συγκλίνουν σε κάποια συνάρτηση, ή και για ακολουθίες συναρτήσεων. Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει να ληφθούν υπόψην οι παραπάνω περιορισμοί.

Στο σημείο αυτό του άρθρου μας θα παραθέσουμε μια απόδειξη για ένα πολύ ενδιαφέρον άπειρο γινόμενο της παραπάνω μορφής.

Πόρισμα 0.1. *Ισχύει ότι:*

$$sinz = \frac{ze^{iz}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+itan\left(\frac{z}{2^n}\right)\right)},\ x \neq 0,\ \frac{z}{2^n} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Απόδειξη. Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι:

$$e^{i\lambda} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+itan(a_n)}{|sec(a_n)|} \right)\ (1),\ \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Επιλέγουμε την ακολουθία αριθμών $\left\{a_n = \frac{z}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $\frac{z}{2^n} \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ γιατί σε κάθε άλλη περίπτωση θα είχαμε $tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ που δεν ορίζεται.

Επομένως έχουμε από την (1):

$$exp\left\{ i\sum_{n=1}^{\infty} arctan\left(tan\left(\frac{z}{2^n}\right)\right) \right\} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{cos\left(\frac{z}{2^n}\right)} \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+itan\left(\frac{z}{2^n}\right)\right) \Rightarrow$$

$$exp\left\{i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{2^n}\right\}\frac{z}{sin(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+itan\left(\frac{z}{2^n}\right)\right)\Rightarrow\frac{ze^{iz}}{sinz}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+itan\left(\frac{z}{2^n}\right)\right)\Rightarrow$$

$$sinz=\frac{ze^{iz}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+itan\left(\frac{z}{2^n}\right)\right)},\ z\neq 0,\ \frac{z}{2^n}\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

□

Να τονίσουμε πως το παραπάνω αποτέλεσμα βασίζεται στο γνωστό γινόμενο του Viete , που όμως ισχύει χωρίς περιορισμό ως προς τη γωνία. Το συμπέρασμα που εξάγουμε από το παραπάνω είναι ότι η Πρόταση 0.1 λειτουργεί ως ταυτότητα. Στο σημείο αυτό του άρθρου μας θα παραθέσουμε μερικές προτάσεις που θα σας φανούν χρήσιμες στην επίλυση των προβλημάτων που ανατίθενται στο τέλος του άρθρου. Επίσης θα κάνουμε μια ξεχωριστή αναφορά στην συνάρτηση Ζήτα του Riemann και θα αποδείξουμε μια ενδιαφέρουσα πρόταση για μια σειρά πρώτων αριθμών. Τις αποδείξεις από τις προτάσεις που ανατίθενται μπορείτε είτε να τις επιλύσετε ως ασκήσεις είτε να τις βρείτε στην βιβλιογραφία του άρθρου. Να τονίσουμε πως η απόδειξη της πρώτης ταυτότητας δεν υπάρχει με αυτή τη μορφή στη βιβλιογραφία μας, καθώς και οι προτάσεις 0.1 και 0.4 δεν έχουν βρεθεί μέχρι προτείνος σε κάποιο βιβλίο.

Πρόταση 0.2. *Ισχύει η ανισοτική σχέση:*

$$a_1+a_2+...+a_N\leq\prod_{k=1}^{N}(1+a_k)\leq e^{a_1+a_2+...+a_N}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 0.3. *Το $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει, αν και μόνον εάν η $\sum_{n=1}^{\infty}log(a_n)$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Η απόδειξη παραλείπεται. □

Ορισμός 0.1. Ως συνάρτηση Ζήτα (για τους πραγματικούς αριθμούς) ορίζεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\ x\in(1,\infty)$$

Ορισμός 0.2. Ως συνάρτηση Ζήτα (για τους πραγματικούς αριθμούς) ορίζεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$\zeta(x) = \prod_{p \ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right)$$

Απόδειξη. Από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + ... \ (1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + ... + \frac{1}{2n^x} + ... \ (2)$$

Αφαιρόντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + ...$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τους επόμενους όρους του αθροίσματος παίρνουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε, που είναι γνωστό ως ¨Γινόμενο του Euler¨. □

Πρόταση 0.4. *Η παρακάτω σειρά συγκλίνει και μάλιστα ισχύει:*

$$\sum_{p \ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{logp}{p^2-1} = \gamma + log\left(\frac{2\pi}{A^{12}}\right)$$

όπου γ η σταθερά των Euler-Mascheroni και A η σταθερά των Glaisher-Kinkelin [3] .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \ x > 1$. Παραγωγίζοντας κάθε όρο του αθροίσματος έχουμε ότι:

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{logn}{n^x} \Rightarrow \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{log\left(\frac{1}{n}\right)}{n^x} \Rightarrow$$

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} log\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^x}}\right) \Rightarrow \zeta'(x) = log\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^x}}\right) \Rightarrow$$

$$exp\left\{\zeta'(x)\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^x}} \ (1)$$

Επίσης από τον ορισμό της συνάρτησης Ζήτα του Euler έχουμε ότι:

$$\zeta(x) = \prod_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right) \Leftrightarrow log(\zeta(x)) = log\left(\prod_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$log(\zeta(x) = \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} log\left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right)$$

Παραγωγίζοντας και την παραπάνω ισότητα έχουμε ότι:

$$\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} = \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{p^{-x}logp}{1-p^{-x}} \Rightarrow \zeta'(x) = \zeta(x) \cdot \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{p^{-x}logp}{1-p^{-x}} \Rightarrow$$

$$\zeta'(x) = \zeta(x) \cdot \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{logp}{p^x - 1}$$

$$exp\left\{\zeta'(x)\right\} = exp\left\{\zeta(x) \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{logp}{p^x - 1}\right\} \ (2)$$

Από την (1) και (2) αν θέσουμε όπου $x = 2$ λαμβάνουμε:

$$exp\left\{\zeta(x)\right\} = \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{logp}{p^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right) \ (3)$$

Το άπειρο γινόμενο της (2) μπορεί να υπολογιστεί και μάλιστα ισχύει ότι:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right) = exp\left\{\frac{\pi^2}{6}\left(\gamma + log2\pi - 12logA\right)\right\} \ (4)$$

Γίνεται έτσι εύκολα αντιληπτό από τις (3) και (4) ότι:

$$exp\left\{\frac{\pi^2}{6} \sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{logp}{p^2-1}\right\} = exp\left\{\frac{\pi^2}{6}\left(\gamma + log2\pi - 12logA\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\sum_{p\ \pi\rho\omega\tau o\varsigma} \frac{logp}{p^2-1} = \gamma + log\left(\frac{2\pi}{A^{12}}\right)$$

□

Αναφορες

[1] Joseph Bak, Donald Newman, *Μιγαδική Ανάλυση*, Leader Books.
[2] Ιστότοπος *http://mathworld.wofram.com.*
[3] W.J.Kaczor, M.T.Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*, Student Mathematical Library AMS (American Mathematical Society).

Ασκησεις

Άσκηση 0.1. *Αποδείξτε ότι*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_n^2}\right)=\frac{15}{\pi^2}$$

όπου p πρώτος.

Άσκηση 0.2. *Αποδείξτε ότι*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{sec\left(\frac{1}{p_n^2}\right)}{1+itan\left(\frac{1}{p_n^2}\right)}\right)^{\frac{1}{i}}\leq\frac{\pi^2}{15}$$

Άσκηση 0.3. *Αποδείξτε ότι*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2i}{\sqrt{n^2+4}}=e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

Άσκηση 0.4. *Αποδείξτε την ανίσωση της πρότασης 0.2.*

Άσκηση 0.5. *Αποδείξτε ότι για κάθε συνάρτηση που έχει ανάπτυγμα δυναμοσειράς με κέντρο x_0 ισχύει:*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+itan\left(a_n\left(x-x_0\right)\right)}{sec\left(a_n\left(x-x_0\right)\right)}=e^{if(x)}$$

Οι λύσεις των γενικών ασκήσεων του τεύχους 1 μπορούν να βρεθούν στο περιοδικό ¨Θεαίτητος' τεύχος 1.

Τμημα Μαθηματικων, Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης 541 24 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΕΥΧΟΥΣ 1

1

Άσκηση 1.1.

Απόδειξη. Αφού n περιττός έχουμε ότι $(n,2)=1$. Επίσης αφού $\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$, με $p_1, \ldots p_n$ διαφορετικά ανά δύο στην πρωταρχική ανάλυση του n έχουμε:

$\phi(n) \leq n$ άρα ο $\phi(n)$ είναι παράγοντας του γινομένου $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ και επομένως $\exists k_n \in \mathbb{N} \ : n! = \phi(n)\cdot k_n$

Από το θεώρημα Fermat-Euler έχουμε:

$2^{\phi(n)} \equiv 1(modn) \Rightarrow (2^{\phi(n)})^{kn} \equiv 1^{kn}(modn) \Rightarrow 2^{n!} \equiv 1(modn)$

□

Άσκηση 1.2.

Απόδειξη. Αν $p=2$ τότε θα έπρεπε $2|2^2+3 \Rightarrow 2|7$ άτοπο, άρα p περιττός πρώτος, δηλαδή $(p,2)=1$. Άρα από το Θεώρημα του Fermat: $2^{p-1} \equiv 1(modp) \Rightarrow 2^p \equiv 2(modp) \Rightarrow p|2^p-2$ και λόγω υπόθεσης $p|(2^p+3)-(2^p-2) \Rightarrow p|5 \Rightarrow p=5$. Ττότε

$$5|2^5+3 \Leftrightarrow 5|35 \Rightarrow p=5$$

. □

Άσκηση 1.3.

Απόδειξη. Ως γνωστόν κάθε πρώτος p είναι της μορφής $4n+1$ ή της μορφής $4n+3$ αν είναι περιττός. Δηλαδή $p \equiv 3(mod4) \Leftrightarrow p = 4n+3,\ n \in \mathbb{N}$. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Τότε αφόυ $p|x^2+1$ έχουμε $(p,x)=1$, ειδάλλως $p|x \Rightarrow p|x^2$ και τότε θα έπρεπε $p|x^2+1-x^2 \Rightarrow p|1$, αδύνατον. Από το Θεώρημα Fermat λοιπόν:

$$x^{p-1} \equiv 1(modp) \Rightarrow x^{4n+2} \equiv 1(modp)\ (1)$$

Ακόμη

$$p|x^2+1 \Rightarrow x^2 \equiv -1(modp) \Rightarrow \left(x^2\right)^{2n+1} \equiv \left(-1\right)^{2n+1}(modp) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^{4n+2} \equiv -1(modp)\ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $1 \equiv -1(modp) \Rightarrow p|2 \Rightarrow p = 2$ άτοπο γιατί p περιττός.

□

Άσκηση 1.4.

Απόδειξη. Πρώτον αν $n \in \mathbb{N},\ n > 2$ και $x < n$ με $(x, n) = 1$ τότε έχουμε και πως $(n, n-x) = 1$. Έστω πως $(n, n-x) = \delta$ με $\delta > 1$ τότε

$$\begin{cases} \delta|n \\ \delta|n-x \end{cases} \Rightarrow \delta|n-(n-x) \Rightarrow \delta|x \text{ Δηλαδή } \delta|(n,x) \Rightarrow \delta|1, \text{ άτοπο}$$

καθώς $\delta > 1$. Άρα $(n, n-x) = 1$.Αποδείξαμε λοιπόν πως οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του $n \in \mathbb{N},\ n > 2$ και είναι πρώτοι με αυτόν ¨πηγαίνουν' σε ζεύγη. Επομένως $\phi(n)$ άρτιος $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2$.
Τώρα αφού $(a, n\lambda) = 1 \Rightarrow (a, n) = 1$ και $(a, \lambda) = 1$. Άρα από το Θεώρημα των Fermat-Euler έχουμε ότι:

$a^{\phi(k)} \equiv 1(modk) \Rightarrow \left(a^{\phi(k)}\right)^{\phi(\lambda)} \equiv 1(modk) \Rightarrow a^{\frac{1}{2}\phi(k\lambda)} \equiv 1(modk) \Rightarrow$
$k|a^{\frac{1}{2}\phi(k\lambda)} - 1$ (1) καθώς $\phi(k)\phi(\lambda) = \phi(k\lambda)$ μιας και $(k, \lambda) = 1$. $a^{\phi(\lambda)} \equiv 1(mod\lambda) \Rightarrow (a^{\phi(\lambda))^{\frac{\phi(k)}{2}}} \equiv 1(mod\lambda) \Rightarrow \lambda|a^{\frac{1}{2}\phi(k\lambda)} - 1$, ομοίως. (2)

Αφού τώρα $(k, \lambda) = 1$ λόγω των σχέσεων διαιρετότητας (1) και (2) έπειται ότι: $k\lambda|a^{\frac{1}{2}\phi(k\lambda)} - 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}\phi(k\lambda} \equiv 1(modk\lambda)$. □

Άσκηση 1.5.

Φοιτητές και ενδιαφερόμενοι που γνωρίζουν την έννοια της τάξης ακεραίου αριθμού (mod n) μπορούν να παρακάμψουν τον ακόλουθο ορισμόκαι το λήμμα που ακολουθεί και να μεταβούν κατευθείαν στην ανάγνωση της απόδειξης. Οι υπόλοιποι καλό θα ήταν πρώτα να τα διαβάσουν. Συνήθως στο τμήμα μας, στο μάθημα των Αλγεβρικών Δομών Ι εισάγεται η έννοια της τάξης στοιχείου κυκλικής ομάδας.

Ορισμός 1.1. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Ονομάζουμε τάξη(order)του στοιχείου a *modulon* τον μικρότερο θετικό αριθμό $k\ : a^k \equiv 1(modn)$. Συμβολικά γράφουμε $k = ord_n(a)$.

Λήμμα 1.1. *Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αν για τον $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a^k \equiv 1(modn)$ τοτε $ord_n(a)|k$.*

Συνεχίζουμε με την απόδειξη.

Απόδειξη. Έστω η Ευκλείδια διαίρεση του $k \in \mathbb{N}$ με την $ord_n(a)$ Έχουμε $q, r \in \mathbb{Z}$:
$k = q{\cdot}ord_n(a){+}r$ με $0 \leq r < ord_n(a)$ (1) Υποθέτουμε πως $r > 0$.Έχουμε τότε πως:

$a^r \equiv u(modn) \Rightarrow a^r \cdot \left(a^{ord_n(a)}\right)^q \equiv u \cdot 1^q(modn) \Rightarrow a^{q \cdot ord_n(a)+r} \equiv u(modn) \Rightarrow a^k \equiv u(modn) \Rightarrow u \equiv 1(modn) \Rightarrow n \leq |u-1|$ ή $u = 1$, με $0 < u < n$.

Προφανώς πρέπει $u = 1$ γιατί η πρώτη περίπτωση οδηγεί σε αδύνατο αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια

$a^r \equiv 1(modn),\ 0 < r < ord_n(a)$ που είναι αδύνατο από τον ορισμό της τάξης. Επομένως $r = 0$ και άρα $k = q \cdot ord_n(a)$. $\square$

Προχωράμε στην απόδειξη της άσκησης.

Απόδειξη. Έστω q πρώτος διαιρέτης του $2^p - 1$. Τότε προφανώς $q \neq 2$ ειδάλλως $2|2^p - 1$, άτοπο. Άρα q περιττός πρώτος και άρα $(q, 2) = 1$. Επομένως από το Θεώρημα Fermat έχουμε: $2^{q-1} \equiv 1(modq)$ (1). Έστω τώρα και η $ord_q(2)$. Τότε αφού $2^p \equiv 1(modq)$ από το λήμμα έχουμε πως $ord_q(2)|p \Rightarrow ord_q(2) = 1$ ή $ord_q(2) = p$. Άν $ord_q(2) = 1\ : 2 \equiv 1(modp) \Rightarrow p|1$ άτοπο, άρα $ord_q(2) = p$ και άρα έχουμε λόγω της (1) και του λήμματος έχουμε ότι $ord_q(2)|q - 1 \Rightarrow p|q - 1 \Rightarrow p < q$. $\square$